Hydrodynamica

Danielis Bernoulli, Hydrodynamica siva de viribus et motibus fluidorum comment arii (1738)

Westerweel, Jerry

Publication date
2016

Document Version
Final published version

Published in
Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde

Citation (APA)
Westerweel, J. (2016). Hydrodynamica: Danielis Bernoulli, Hydrodynamica siva de viribus et motibus fluidorum comment arii (1738). *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, *82*(6), 218-220.

Hydrodynamica

Danielis Bernoulli, *Hydrodynamica siva de viribus et motibus fluidorum commentarii* (1738).

U kent het wel: na afloop van een voorstelling in het theater moet iedereen door dezelfde (smalle) uitgang naar buiten. Naarmate u dichter bij de uitgang komt, gaat u van lopen over in schuifelen, en heel langzaam passeert u de uitgang waarbij u voortdurend tegen anderen opbotst. Gelukkig gaat het allemaal weer soepeler als u eenmaal in de ruime foyer bent. Dit ervaringsfeit bij het passeren van een vernauwing, waarbij uw snelheid afneemt en de 'druk' (soms ook in de vorm van irritatie) toeneemt, komt duidelijk niet overeen met de stroming van een fluïdum door een vernauwing in een buis; bij een fluïdum neemt de snelheid in de vernauwing juist toe en de druk af! Het wekt dan soms ook verbazing dat dit zo is als men voor het eerst wordt geconfronteerd met deze toepassing van de wet van Bernoulli.

In het kort houdt de wet van Bernoulli in dat voor een bewegend fluïdum met een dichtheid ρ langs een stroomlijn geldt dat:

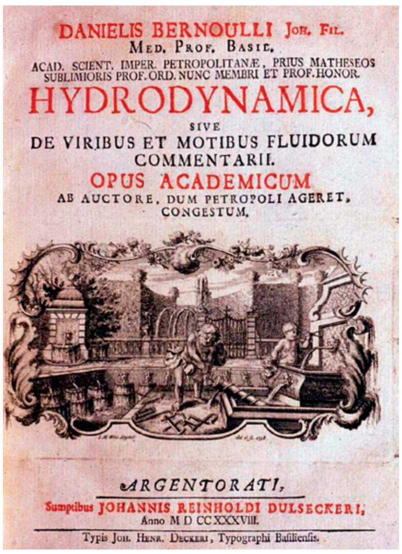
$$p + \rho V^2/2 + \rho g z = \text{constant} \qquad (1)$$

waarbij V de snelheid, p de druk en z de hoogte is ten opzichte van een horizontaal referentievlak bij een zwaartekrachtversnelling g. Deze wet is in principe een behoudswet voor energie voor de stroming door een (denkbeeldige) stroombuis, waarbij wordt verondersteld dat het fluïdum geen viscositeit heeft, het stromingsveld incompressibel en stationair is, er geen warmte-overdracht is en er in het controlevolume van de stroombuis geen mechanische arbeid wordt verricht [1]. De wet kan op verschillende manieren worden afgeleid; hij volgt met de genoemde veronderstellingen uit de eerste hoofdwet van de thermodynamica voor een open systeem, maar kan ook worden afgeleid uit de wet van Newton: om een hoeveelheid fluïdum te versnellen bij het passeren van een vernauwing is een kracht nodig en zonder externe kracht wordt deze onttrokken aan de drukgradiënt; het omgekeerde gebeurt na de vernauwing als de snelheid van het fluïdum weer moet afnemen. Maar zo is de wet niet ontstaan.

Hydrodynamica

De grondbeginselen voor de bekende wet (zie formule 1) werden voor het eerst beschreven in het boek *Hydrodynamica* uit 1738 dat werd geschreven door Daniel Bernoulli. Hij werd weliswaar geboren in Groningen, maar het grootste deel van zijn leven bracht hij buiten de toenmalige Nederlanden door; eerst in Sint Petersburg, waar hij een eerste versie van zijn boek schreef, en later in Basel. Zijn boek is oorspronkelijk geschreven in het Latijn, maar gelukkig is er een goede vertaling beschikbaar [2]. Een origineel exemplaar van het boek is aanwezig in het tresor van de bibliotheek van de TU Delft.

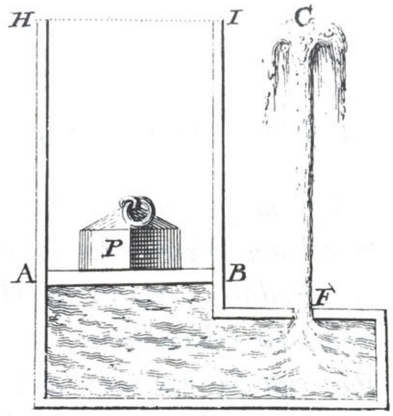
Het voorwoord van de vertaling beschrijft de bijzondere geschiedenis van de totstandkoming van dit boek. Een eerste versie schreef Daniel in Sint Petersburg, waar ook zijn goede vriend Euler verbleef. Echter, Euler liet de vader van Daniel, Johann Bernoulli, weten van het bestaan van dit werk. Wellicht uit angst om door zijn zoon voorbijgestreefd te worden, schreef en publiceerde Johann een eigen boek, *Hydraulica*, over vrijwel hetzelfde onderwerp en sjoemelde met het jaar van publicatie om te doen lijken dat het eerder was verschenen dan het werk van zijn zoon. Daniel beklaagde zich diepgaand tegenover Euler over deze actie van zijn vader. Beide boeken benaderen op een verschillende manier de relatie tussen de druk in en de snelheid van een stromend fluïdum. In de tijd waarin het boek werd geschreven was het overigens niet geheel duidelijk wat 'druk' nu eigenlijk precies was. In feite dacht Daniel dat druk een eigenschap was die alleen aan het oppervlak van een wand bestond en druk werd beschreven als de hoogte tot waarop een vloeistof in een buis steeg of de hoogte die een straal kon bereiken. Zijn vader deelde de vloeistof in een buis op in kleine plakjes, waarbij de druk niet alleen op de wand werd uitgeoefend, maar ook tussen de plakjes onderling; dit is in feite een differentiële beschrijving die Euler in staat stelde om na integratie van de drukgradiënt tot formule 1 te komen. Men zal dus tevergeefs zoeken naar deze uitdrukking in beide boeken.



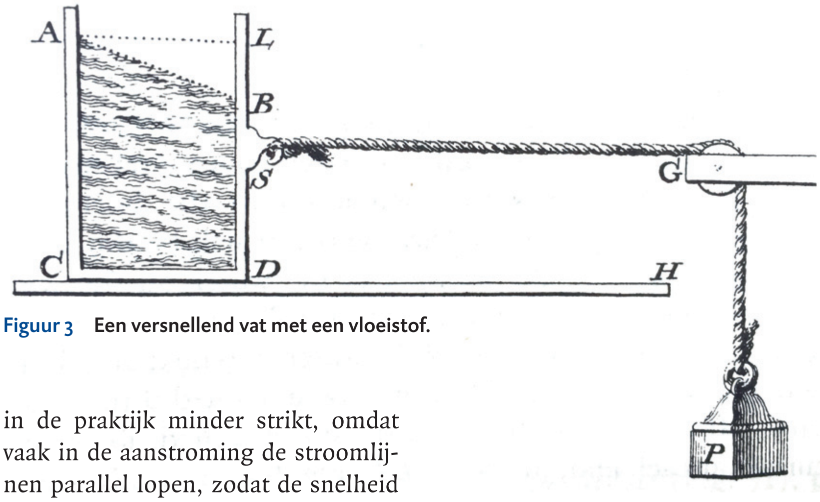
Figuur 1 **De voorkant van *Hydrodynamica*.**

Het eerste wat opvalt in het boek van Daniel is de zeer uitvoerige en diepgaande dankbetuiging van Daniel jegens zijn beschermheer in Sint Petersburg. In vergelijking hiermee zijn tegenwoordige dankwoorden in proefschriften en artikelen uiterst beknopt en bescheiden.

In de tijd waarin het boek werd geschreven was er nog geen goed en eenduidig begrip van eenheden en dimensies. Het valt dan ook op dat alles wordt uitgedrukt in grootheden met de dimensie lengte. Dat is logisch voor de afmetingen van een vat of de doorsnede van een uitstroomopening, maar ook snelheid van een vloeistof en druk worden worden beschreven als de hoogte van een straal (zie figuur 2). Juist deze illustratie, waarbij zowel 'snelheid' als 'druk' worden uitgedrukt in de hoogte van een straal,



Figuur 2 Druk, snelheid en hoogte van een straal zijn equivalent.



Figuur 3 Een versnellend vat met een vloeistof.

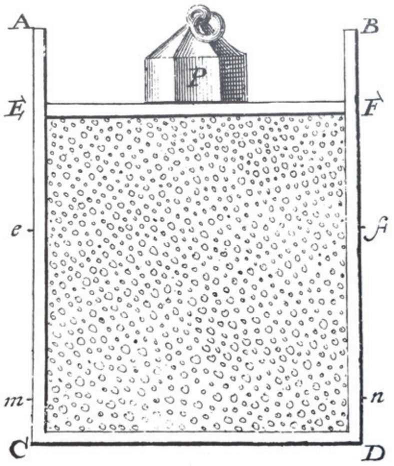
geeft de essentie weer van formule 1. Wat verder opvalt in zijn boek zijn de illustraties van experimenten, zoals leeglopende vaten en met vloeistof gevulde vaten die eenparig worden versneld (figuur 3). Deze worden tegenwoordig nog steeds in vrijwel onveranderde vorm gebruikt als illustraties bij colleges en in tentamenopgaven.
In een van de latere hoofdstukken beschrijft Daniel zelfs een eerste aanzet tot een statistisch-mechanische beschrijving van druk op basis van de kinetische energie van bewegende gasdeeltjes (figuur 4). Ten slotte beschrijft Daniel ook een aantal hydraulische 'machines' (figuur 5) waarbij hydrostatische potentiële energie wordt omgezet in kinetische energie en vervolgens weer naar potentiële energie. Pas vele jaren later zouden Joule en Carnot een degelijke thermodynamische beschrijving geven van het begrip energie en efficiëntie in een machine.
Uiteraard zijn er vele toepassingen van de wet van Bernoulli, zoals de waterstraalpomp (ook wel *eductor* of *venturi* genoemd), waarbij de lage druk van een stromend gas of een vloeistof in een vernauwing wordt gebruikt om materiaal op te zuigen of een vacuüm te creëren. Ook de Pitotbuis, voor het meten van de snelheid van een gas, vinden we nog steeds op elk vliegtuig.

Misvattingen

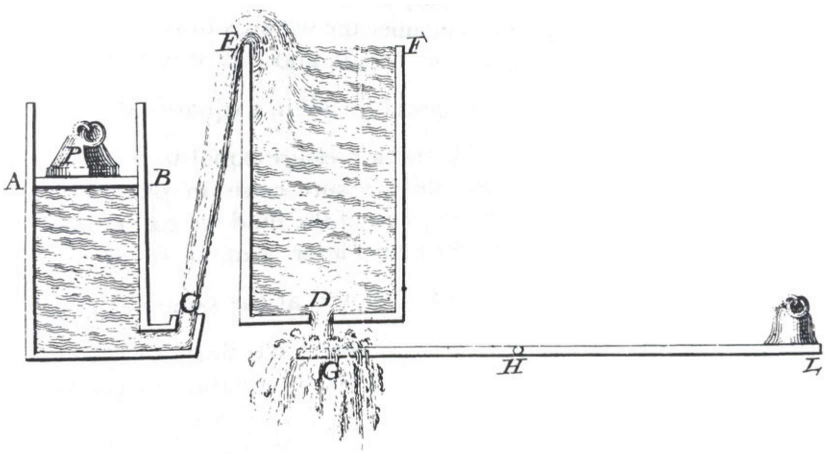
Wat in dit stuk niet mag ontbreken, zijn de misvattingen omtrent demonstraties van de wet van Bernoulli, of effecten die ogenschijnlijk met de wet verklaard zouden worden [3]. Alhoewel de wet van Bernoulli in feite alleen langs een stroomlijn geldt, is dat in de praktijk minder strikt, omdat vaak in de aanstroming de stroomlijnen parallel lopen, zodat de snelheid en druk tussen deze twee stroomlijnen in beginsel gelijk zijn. Het is met deze conditie mogelijk om de wet van Bernoulli stroomafwaarts op twee verschillende stroomlijnen toe te passen. Het is deze impliciete conditie die in het algemeen leidt tot foutieve toepassingen en verklaringen van effecten door middel van de wet van Bernoulli.
Een nog steeds veel voorkomende foutieve toepassing is het verklaren van de lift-kracht die door een vleugelprofiel wordt opgewekt, omdat lucht aan de bovenkant van een vleugel in dezelfde tijd een langere weg zou moeten afleggen dan de lucht langs de onderkant; de snellere lucht aan de bovenkant van de vleugel heeft een lagere druk dan de langzamer stromende lucht langs de onderkant, met een nettokracht omhoog, oftewel 'lift'. Allereerst is er geen enkele wet die voorschrijft dat lucht in dezelfde tijd via de boven- en onderkant langs de vleugel moet stromen (en eenvoudige visualisaties van de stroming of een numerieke simulatie laten zien dat dat ook niet zo is). Vervolgens kan op deze manier niet worden begrepen waarom een vliegtuig ondersteboven kan vliegen. En ook niet waarom een zeer dun en gekromd profiel (waarbij volgens het principe van gelijke aankomsttijden aan de achterkant van het profiel de snelheid boven en onder het profiel identiek zouden moeten zijn) wel degelijk lift wordt gegenereerd. (De correcte verklaring van lift volgt uit de wet van behoud van impuls, oftewel de tweede wet van Newton, waarbij de afbuiging van een horizontale luchtstroom naar beneden een reactiekracht omhoog geeft.) Wel is het zo dat, als we eenmaal weten hoe de lucht rondom een vleugelprofiel beweegt, we met behulp van de wet van Bernoulli het verloop van de druk langs een stroomlijn kunnen uitrekenen. Als de stroomlijn parallel aan het oppervlak loopt, is de druk langs de stroomlijn gelijk aan de druk op het oppervlak (ondanks het feit dat het gas of de vloeistof een eindige viscositeit heeft).
Vaak wordt de wet van Bernoulli gedemonstreerd door te blazen over een stukje papier. Eerst hangt het papier naar beneden, maar door er overheen te blazen, richt het zich op en is het parallel aan de horizontale luchtstroom, met als verklaring dat de snellere luchtstroom aan de bovenkant van het papier voor een lagere druk zou zorgen

Jerry Westerweel studeerde technische natuurkunde aan de TU Delft en promoveerde in 1993 op een proefschrift over de ontwikkeling en toepassing van *particle image velocimetry* om coherente structuren in turbulente stromingen te meten. Als KNAW Akademie-onderzoeker werkte hij aan de Stanford Universiteit en het California Institute of Technology. In 2002 werd hij benoemd als Antoni van Leeuwenhoek hoogleraar aan de TU Delft. Sinds 2005 leidt hij de sectie Stromingsleer binnen de Afdeling Proces & Energie. Zijn huidige onderzoek ligt op het terrein van turbulentie en coherente structuren, gedispergeerde meerfasenstroming, *microfluidics*, biologische stromingsleer en stromingsleer van roeien en zwemmen.

J.Westerweel@tudelft.nl



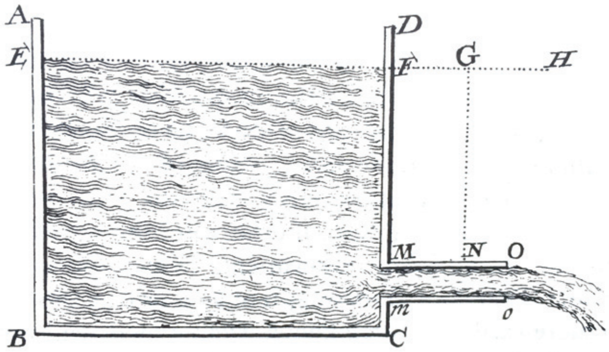
Figuur 4 **Druk beschreven als kinematische energie van gasdeeltjes.**



Figuur 5 **Een hydraulische machine.**

dan de hogere druk van de stilstaande lucht aan de onderkant. Echter, in werkelijkheid is in deze situatie de druk aan de bovenkant gelijk aan de druk aan de onderkant van het papier. U kunt dit eenvoudig verifiëren door het papier verticaal naar beneden te laten hangen en er dan langs een kant langs te blazen: het papier blijft verticaal naar beneden hangen, en buigt niet af in de richting van de snelle luchtstroom. De reden waarom het papiertje zich opricht is vanwege het Coanda-effect [4], waarbij een luchtstroom het gekromde oppervlak van het papier volgt en de kromming van de stroomlijnen een gradiënt in de druk induceert.

Ten slotte is ook het afbuigen van een draaiende tennisbal of voetbal niet te verklaren met de wet van Bernoulli. Deze afbuiging staat bekend als het Magnuseffect (voor een roterende cilinder) of het Robinseffect (voor een roterende bol) en ontstaat omdat de stroming langs het deel van de cilinder of bol dat met de stroming mee beweegt op een later punt loslaat dan het deel dat tegen de stroming in beweegt [5]. Loslating van de stroming (waarbij de stroming niet meer de vorm van het oppervlak kan volgen) heeft te maken met de viscositeit van het gas of de vloeistof en we weten al dat de wet van Bernoulli alleen geldt als we de viscositeit verwaarlozen. Bovendien kan het Robinseffect omkeren van richting, afhankelijk van het Reynoldsgetal (oftewel, de viscositeit van het fluïdum). Wel is het zo dat als we eenmaal de stroomlijnen rondom een roterende cilinder of bol kennen, we met de wet van Bernoulli de druk langs de stroomlijn kunnen uitrekenen (mits de stroming geen vorticiteit heeft).



Figuur 6 **Een leeglopend vat.**

Het leeglopende vat

Dit stuk wil ik graag afsluiten met een demonstratie van de wet van Bernoulli: het leeglopende vat (figuur 6). Als we de wet toepassen op een stroomlijn van het vrije oppervlak naar de uitstroom-opening, dan volgt hieruit dat de snelheid waarmee een vloeistof door de opening stroomt gelijk is aan:

$$V = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Dit resultaat was in 1643 al proefondervindelijk gevonden door Torricelli. Het resultaat in formule 2 volgt uit formule 1 als we de snelheid van het vrije oppervlak verwaarlozen. Opmerkelijk is dat dit dezelfde snelheid is als we een massa vrij laten vallen over een hoogte h. Het is wel van belang dat het vat leegstroomt door een kort tuitje; in dat geval zijn er vrijwel geen verliezen in de uitstroom. In onze demonstratie meten we de tijd $\Delta t = t_2 - t_1$ tussen het passeren van hoogte h_1 en hoogte h_2 van het vrije oppervlak in het vat. De verandering dh van de hoogte van het vrije oppervlak wordt gegeven door:

$$A_1 dh = -A_2 V dt$$

waarin A_1 de grootte van het vrije oppervlak is en A_2 de doorsnede van de uitstroomopening. De oplossing van deze differentiaalvergelijking geeft:

$$\Delta t = 2\frac{A_1}{A_2}\frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{2g}} \qquad (3)$$

U zult zich verbazen hoe nauwkeurig de gemeten tijd klopt met die van formule 3, ondanks het feit dat deze geldt voor een vloeistof zonder viscositeit, terwijl de gebruikte vloeistof wel degelijk een viscositeit heeft.

Jerry Westerweel

Referenties

1 F.M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 7th Ed. (2011).
2 Daniel Bernoulli en Johann Bernoulli. *Hydrodynamics* (Daniel Bernoulli) & *Hydraulics* (Johann Bernoulli. Vertaald uit het Latijn door T. Carmody en H. Kobus. Voorwoord van H. Rouse. Dover Publ. (1968).
3 H. Babinsky, *How do wings work? Phys. Education* 38 (2003) 497-503.
4 T.E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press (1995).
5 P.K. Kundu en I.M. Cohen, *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic, 3rd Ed. (2004).